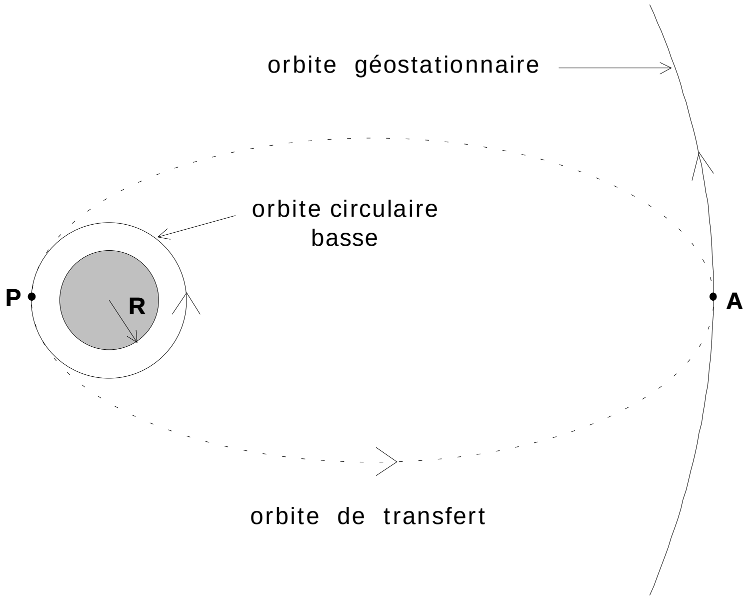
-EXERCICE 15.4-

• ENONCE :

« Mise en orbite géostationnaire »



Pour placer un satellite en orbite géostationnaire, on l'envoie d'abord sur une orbite circulaire basse située à l'altitude : $h_P = 200\ km$

On le fait passer ensuite sur l'orbite de transfert elliptique (= "ellipse de Hohmann") , dont le périgée P se trouve sur l'orbite basse, et l'apogée A sur l'orbite géostationnaire, dont l'altitude vaut : $h_A = 35800\ km$

Le rayon de la Terre est $R = 6400\ km$

On donne le champ de pesanteur à la surface de la Terre $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$

1) Que vaut l'excentricité de l'orbite de transfert ?

2) Quel est le temps nécessaire au transfert ?

3) Calculer les vitesses v_P et v_A respectivement au périgée et à l'apogée de l'orbite de transfert.

4) Calculer l'incrément de vitesse à fournir au satellite à chaque changement d'orbite.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

• CORRIGE :

«Mise en orbite géostationnaire »

1) Comme dans l'exercice 15.3, écrivons : $r_A = R + h_A = \dfrac{p}{1-e}$ et $r_P = R + h_P = \dfrac{p}{1+e}$ $\Rightarrow$ en faisant le rapport membre à membre de ces 2 expressions, il vient :

$$\boxed{e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} = \frac{h_A - h_P}{h_A + h_P + 2R} \simeq 0,73}$$

2) La durée du transfert correspond à la moitié de la période de l'orbite elliptique $\Rightarrow$ il faut se servir de la 3ème loi de Kepler :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \times a^3 = \frac{4\pi^2}{g_0 R^2} \times \left(\frac{h_A + h_P + 2R}{2}\right)^3, \text{ puisque } g_0 = \frac{GM}{R^2} \text{ et } 2a = h_A + h_P + 2R$$

On en déduit la durée du transfert : $\boxed{\tau = \dfrac{T}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{8 g_0 R^2}(h_A + h_P + 2R)^3}}$ A.N : $\boxed{\tau \simeq 5h\ 15mn}$

3) On peut passer par l'énergie d'une trajectoire elliptique ; le cours permet d'écrire :

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \Rightarrow v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) = 2g_0R^2\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{2R + h_A + h_P}\right)$$

On en déduit : $\boxed{v_A = \sqrt{\dfrac{2g_0R^2}{h_A + h_P + 2R} \times \dfrac{h_P + R}{h_A + R}}}$ $\boxed{v_P = \sqrt{\dfrac{2g_0R^2}{h_A + h_P + 2R} \times \dfrac{h_A + R}{h_P + R}}}$

• Application numérique : $\boxed{v_A \simeq 1,6\ km/s}$ et $\boxed{v_P \simeq 10,3\ km/s}$

4) Pour calculer les vitesses aux mêmes points P et A, mais sur des orbites circulaires, utilisons le PFD projeté sur le vecteur normal de la base de Frénet (pour un mouvement à force centrale circulaire, l'accélération est purement normale) :

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{R+h} = \frac{GMm}{(R+h)^2} = \frac{mg_0R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R+h}} \Rightarrow \boxed{v_A(cercle) = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R+h_A}} \simeq 3,1\ km/s}$$

et : $\boxed{v_P(cercle) = \sqrt{\dfrac{g_0R^2}{R+h_P}} \simeq 7,8\ km/s}$

• Les incréments de vitesse à communiquer au satellite lors des changements d'orbite se calculent selon :

$\boxed{\Delta v_A = v_A(cercle) - v_A = 3,1 - 1,6 = 1,5\ km/s}$ et : $\boxed{\Delta v_P = v_P - v_P(cercle) = 10,3 - 7,8 = 2,5\ km/s}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.